Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MAT-I , MA-1111 , ENE-MAR 2013 **SEGUNDO EXAMEN Parcial**
Duración 1:50 H

DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS

SOLUCION

1. Calcule los siguientes límites y en caso que alguno de ellos no exista, explique porque.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$ (5 pts)

RESPUESTA

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x)x^3} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^3} = \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\right) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\cos(x)}\right)
\end{aligned}
$$

Luego:

$\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x) = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ □

b) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{2-\sqrt[3]{-3x+2}}$ (5 pts)

RESPUESTA

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^2+5x-2}{2-\sqrt[3]{-3x+2}} = \frac{(3x-1)\cdot(x+2)}{2-\sqrt[3]{-3x+2}} \cdot \frac{2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2}{2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2} \\
&= \frac{(3x-1)\cdot(x+2)}{2^3-(\sqrt[3]{-3x+2})^3} \cdot \left(2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2\right) \\
&= \frac{(3x-1)\cdot(x+2)}{8-(-3x+2)} \cdot \left(2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2\right) \\
&= \frac{(3x-1)\cdot(x+2)}{3(x+2)} \cdot \left(2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2\right) \\
f(x) &= \frac{(3x-1)}{3} \cdot \left(2^2+2\sqrt[3]{-3x+2}+\left(\sqrt[3]{-3x+2}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-2} f(x) &= \frac{(3(-2)-1)}{3} \cdot \left(2^2+2\sqrt[3]{-3(-2)+2}+\left(\sqrt[3]{-3(-2)+2}\right)^2\right) \\
&= \frac{(-7)}{3} \cdot \left(4+2\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right) = \frac{(-7)}{3}\cdot 12 = \mathbf{-28}
\end{aligned}
$$

$\square$

c) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right) \qquad (a\in\mathbb{R})$ (5 pts)

RESPUESTA

Indeterminación del tipo $+\infty-\infty$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x(x+a)}+x = \left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x(x+a)}-x}{\sqrt{x(x+a)}-x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x(x+a)}\right)^2-x^2}{\sqrt{x(x+a)}-x} = \frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}-x} = \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}-x} \\
&= \frac{ax}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}-x} = \frac{ax}{|x|\sqrt{1+\frac{a}{x}}-x}
\end{aligned}
$$

como x tiende a $-\infty$, se puede considerar a x siempre negativo y en consecuencia $|x|=-x$, así:

$$
f(x) = \frac{ax}{-x\sqrt{1+\frac{a}{x}}-x} = \frac{ax}{-x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)} = -\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}
$$

Luego:

$$
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{a}{\sqrt{1+0}+1} = -\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}
$$

$\square$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - |2-x| - 4}{|2-x|}$ (5 pts)

RESPUESTA

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y adicionalmente la expresión de la función no es la misma a la izquierda y a la derecha de 2, por lo tanto se procede a estudiar los límites laterares.

- $x < 2 \quad \Longrightarrow \quad |2-x| = 2-x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - |2-x| - 4}{|2-x|} = \frac{x^2 - (2-x) - 4}{2-x} = \frac{x^2 + x - 6}{2-x} \\ &= \frac{(x+3)\cdot(x-2)}{2-x} = -(x+3) \end{aligned}$$

Luego:

$\displaystyle \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\mathbf{5}$

- $x > 2 \quad \Longrightarrow \quad |2-x| = x-2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - |2-x| - 4}{|2-x|} = \frac{x^2 - (x-2) - 4}{x-2} = \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \\ &= \frac{(x+1)\cdot(x-2)}{x-2} = (x+1) \end{aligned}$$

Luego:

$\displaystyle \lim_{x\to 2^+} f(x) = \mathbf{3}$

Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

entonces $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x)}$ **no existe**. □

2. Sea

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 4} & , \textbf{ si: } \quad x > 2 \\ b & , \textbf{ si: } \quad x = 2 \\ x + a & , \textbf{ si: } \quad x < 2 \end{cases}$$

Halle los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para los cuales $\boldsymbol{f}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (6 pts)

RESPUESTA

La función es continua en $(-\infty, 2)$, ya que en este intervalo ella está definida por un polinomio de grado 1. También es continua de $(2, +\infty)$, pues en ese intervalo f esta definida como el cociente de funciones continuas.
Para determinar a, b y de forma a obtener la continuidad en todo $\mathbb{R}$ solamente se debe estudiar la continuidad en $x = 2$.
f continua en $x = 2$, quiere decir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \tag{1}$$

- $x < 2 \Longrightarrow f(x) = x + a$

  Luego: $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 + a$

- $x > 2 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 4}$

  $$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 4} = \frac{(x+9)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x+9}{x+2}$$

  Luego: $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{11}{4}$

- $f(2) = b$

Utilizando (1), se tiene:

$$\begin{cases} 2 + a = b \\ \dfrac{11}{4} = b \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{11}{4} - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

En consecuencia, **f es continua en todo $\mathbb{R}$, si $a = \dfrac{3}{4}$** y **$b = \dfrac{11}{4}$** $\square$

3. Encuentre los valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales la función $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 1}}$ posee una recta tangente paralela a la recta $\boldsymbol{y = \sqrt{2}\,x - 5}$ (4 pts)

RESPUESTA

La pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en cualquier punto $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ viene dada por: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Además, la pendiente de la recta dada es $m = \sqrt{2}$.
Para que las rectas en cuestión sean paralelas se debe satisfacer la condición siguiente:

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = m \iff \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2} \iff \frac{x^2}{x^2-1} = 2 \iff x^2 = 2x^2 - 2$$

$$\iff 0 = x^2 - 2 \iff x = \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ \quad \text{ó} \\ x_2 = \ \ \sqrt{2} \end{cases}$$

Luego **los valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales $\boldsymbol{f}$ posee una recta tangente paralela a la recta $\boldsymbol{y = \sqrt{2}\, x - 5}$ son $\boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$ ó $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$**, los cuales estan en el dominio de f. □

4. Diga si es verdadero o falso que la derivada de de la función

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}}$ es $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}}}$ (5 pts)

RESPUESTA

$$f(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right) \\ &= 2\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{aligned}$$

Luego, **es verdadero que:**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{(1-x^2)^3}}}$$ □

5. Calcule la derivada de la siguiente función:

$$\boldsymbol{g(x) = \cos^2\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x) + \tan^3(3x)}\right)}$$

(5 pts)

RESPUESTA

$$\begin{aligned}
g'(x) = \;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left(\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)' \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)' \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}\cdot(\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x))' \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}\cdot\left((\operatorname{sen}(4x))'+(\tan^3(3x))'\right) \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}\cdot(\cos(4x)\cdot(4x)'+3\tan^2(3x)\cdot(\tan(3x))') \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}\cdot(4\cos(4x)+3\tan^2(3x)\cdot\sec^2(3x)\cdot(3x)') \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}\cdot(4\cos(4x)+9\tan^2(3x)\cdot\sec^2(3x)) \\
=\;& 2\cdot\cos\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right] \\
& \cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cos(4x)+9\tan^2(3x)\cdot\sec^2(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{g'(x) = \; -\operatorname{sen}\left(2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}\right)\cdot\frac{4\cos(4x)+9\tan^2(3x)\cdot\sec^2(3x)}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}(4x)+\tan^3(3x)}}}$$